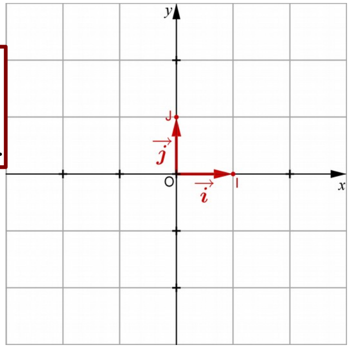
I – Repère orthonormé du plan

Un repère $(O\,;I\,;J)$ est dit **orthonormé** lorsque :

① les axes des abscisses et des ordonnées ont la même unité de longueur ($\boldsymbol{OI = OJ}$) ;

② ces axes sont perpendiculaires : $\boldsymbol{(OI)\perp(OJ)}$.



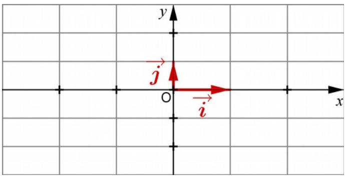
Remarques :

① En posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, ce repère est aussi désigné par le triplet $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

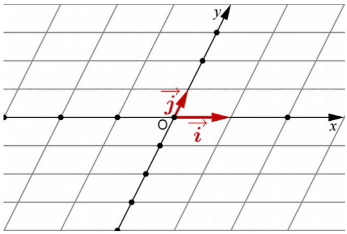
② On dit que $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est une **base de vecteurs**.

③ Il existe d'autres types de repères :

∘ Le repère **orthogonal** dont les axes sont **perpendiculaires** mais n'ont pas la même unité.



∘ Le repère **quelconque** dont les axes **ne sont pas perpendiculaires**.



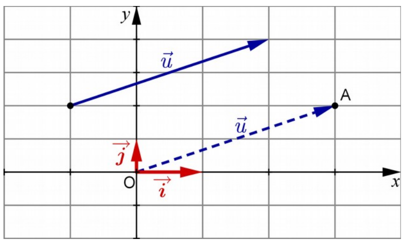
II – Coordonnées d'un vecteur dans un repère

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ du plan.
On nomme A l'unique point de ce repère tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Alors les **coordonnées** du point A sont celles du vecteur $\vec{u}$: $\boldsymbol{A(x\,;y)}$.

Exemple – Méthode :

① Soit $\vec{u}$ le vecteur tel que $\boldsymbol{\vec{u} = 3\vec{i}+2\vec{j}}$.
Alors les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ sont $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$.

② On place le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Les coordonnées de A sont ainsi $A(3\,;2)$.



III – Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

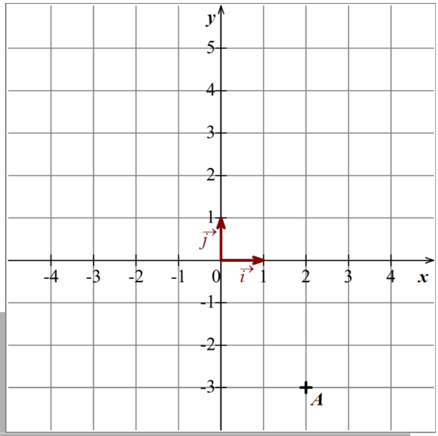
Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ du plan.
Le **vecteur $\overrightarrow{AB}$** a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Exemple :
Le point A est placé dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

① Compléter les coordonnées de A :
$A(.....\,;.....)$

② Placer les points $B(-2\,;5)$ et $C(4\,;3)$.

③ Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.



$$\left.\begin{array}{lcccc} \circ & x_B-x_A & = & -2-2 & = & -4 \\ \text{et} & y_B-y_A & = & 5-(-3) & = & 8 \end{array}\right\}$$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

De manière analogue, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées : **$\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à** $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Exemples :

① Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les points $A(2\,;-3)$ et $B(-2\,;5)$.
Montrer que $J(0\,;1)$ est le milieu du segment $[AB]$.

② Le point C a pour coordonnées $C(4\,;3)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

① $$\left.\begin{array}{lcccc} & x_J-x_A & = & 0-2 & = & -2 \\ \text{et} & y_J-y_A & = & 1-(-3) & = & 4 \end{array}\right\}$$ donc $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{JB}$, on en déduit que **$J$ est le milieu de $[AB]$**.

② $ABCD$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4-x_D \\ 3-y_D \end{pmatrix}$. On résout alors les équations :

$$\begin{array}{lclcrcl} -4 & = & 4-x_D & \text{et} & 8 & = & 3-y_D \\ x_D & = & 4+4 & \text{et} & y_D & = & 3-8 \\ x_D & = & 8 & \text{et} & y_D & = & -5 \end{array}$$

Donc **$D(8\,;-5)$**

IV – Coordonnées du milieu d'un segment

Les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Le point M, **milieu de $[AB]$**, a pour coordonnées $\boldsymbol{x_M = \frac{x_A+x_B}{2}}$ et $\boldsymbol{y_M = \frac{y_A+y_B}{2}}$.

Exemples :

① Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(2;-3)$ et $B(-2;5)$. Déterminer les coordonnées du milieu de $[AB]$.

② Le point C a pour coordonnées $C(4;3)$ et on appelle E le symétrique de C par rapport à $J(0;1)$. Déterminer les coordonnées de E.

① On appelle K le milieu de $[AB]$. Alors

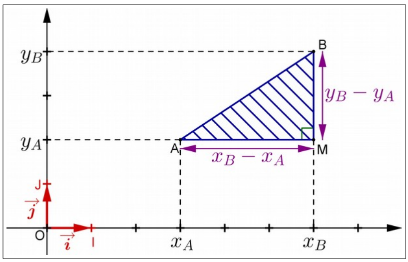
$$x_K = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1 \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{K(0;1)}$$

② Par définition, J est le milieu de $[CE]$. On résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{x_C+x_E}{2} \\ 0 &= \frac{4+x_E}{2} \\ 0 &= 4+x_E \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} y_J &= \frac{y_C+y_E}{2} \\ 1 &= \frac{3+y_E}{2} \\ 2\times 1 &= 3+y_E \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{E(-4;-1)}$$

V – Longueur d'un segment en repère orthonormé

$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points dans un **repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$. On désigne par M le point de coordonnées $M(x_B; y_A)$.



$(O;\vec{i};\vec{j})$ étant orthonormé, on a $\begin{cases} (AM) \,//\, (OI) \\ (BM) \,//\, (OJ) \end{cases}$.

Le triangle ABM est ainsi rectangle en M.
D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2+MB^2 \\ &= \boldsymbol{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \end{aligned}$$

Propriété :

Dans un **repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$, la **longueur** du segment $[AB]$ peut être calculée de trois manières :

① $\boldsymbol{AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

② $\boldsymbol{AB^2 = x_{\vec{AB}}^2+y_{\vec{AB}}^2}$

③ $\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

__Exemple__ :

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère $A(2\,;-3)$; $B(-2\,;5)$ et $C(4\,;3)$.
Démontrer que ABC est un triangle rectangle isocèle .

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$ donc $AB^2 = (-4)^2+8^2 = \mathbf{80}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ donc $AC^2 = 2^2+6^2 = \mathbf{40}$
- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ donc $BC^2 = 6^2+(-2)^2 = \mathbf{40}$

Puisque $AC^2 = BC^2$, on en déduit que $\boldsymbol{ABC}$ **est un triangle isocèle en** $\boldsymbol{C}$.

De plus, $AC^2+BC^2 = AB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boldsymbol{ABC}$ **est rectangle en** $\boldsymbol{C}$.